

MA32 (GEII - S3)

C - SUITE ET SÉRIES

F. Morain-Nicolier

frederic.nicolier@univ-reims.fr

2011 - 2012 / URCA - IUT Troyes

OUTLINE

1. INTRODUCTION

2. SUITES NUMÉRIQUES

3. SÉRIES NUMÉRIQUES

4. SÉRIES ENTIÈRES

1.1. PPN

- ▶ Suites géométriques
- ▶ Séries numériques
- ▶ Séries entières (*définitions, disque de convergence, opérations, dérivation, intégration, développements en série entière usuels*)

OUTLINE

1. INTRODUCTION

2. SUITES NUMÉRIQUES

3. SÉRIES NUMÉRIQUES

4. SÉRIES ENTIÈRES

2.1. INTRODUCTION

DÉFINITION On appelle suite numérique toute application de \mathbb{N} sur \mathbb{R} :

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

- ▶ Rappel : \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels (*ie.* positifs)
- ▶ u_n est le **terme général** de la suite, $u_n = u(n)$
- ▶ une suite peut être considérée comme une liste ordonnée de nombres réels
- ▶ Elle peut éventuellement être définie sur une partie de \mathbb{N} de la forme $I = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ où n_0 est un entier donné.
- ▶ quelques exemples : suite nulle, constante, arithmétique, géométrique, par récurrence, ...

2.1. INTRODUCTION

Que veut-on étudier sur les suites ?

Étant donné une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- ▶ Quelles sont ses variations ?
- ▶ Que se passe-t'il lorsque n devient infiniment grand, *ie.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = ?$$

⇒ étude de la convergence.

2.2. VARIATIONS D'UNE SUITE : MONOTONIE

SUITE CROISSANTE Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. Elle est **croissante** si pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

- ▶ Suite strictement croissante $\Leftrightarrow u_n < u_{n+1}$
- ▶ Comment montrer qu'une suite est croissante ?

SUITE DÉCROISSANTE Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. Elle est **décroissante** si pour tout entier naturel n :

$$u_n \geq u_{n+1}$$

SUITE MONOTONE C'est une suite croissant **ou** décroissante

2.3. VARIATIONS D'UNE SUITE :

MAJORATION / MINORATION

(DÉFINITION) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

M est alors un **majorant** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(DÉFINITION) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée** s'il existe un réel m tel que

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$$

m est alors un **minorant** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(DÉFINITION) Une suite est **bornée** si et seulement si il existe un réel A tel que

$$|u_n| \leq A.$$

2.3. VARIATIONS D'UNE SUITE :

MAJORATION/MINORATION

- ▶ Remarques :
 - ▶ une suite croissante est minorée
 - ▶ une suite décroissante est majorée
- ▶ Exemples

2.4. CONVERGENCE

(DÉFINITION) On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ **existe et est fini**. Alors, le nombre l donné par

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

est un nombre réel appelé **limite de la suite**.

- ▶ une suite qui ne converge pas est **divergente**.
- ▶ Il existe deux façon de diverger :
 - ▶ soit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \pm\infty$
 - ▶ soit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ n'existe pas.

- ▶ exemple : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_n = a^n (a > 0)$.

2.5. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites **convergentes**. Si l et l' sont les limites respectives de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors

1. La suite **somme** $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers $l + l'$
2. Pour tout réel α , la suite $(\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers αl
3. La suite **produit** $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers ll' .

2.6. CRITÈRES DE CONVERGENCE

(Théorème fondamental)

- ▶ Toute suite décroissante et minorée est convergente
- ▶ Toute suite croissante et majorée est convergente.

- ▶ exemple : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_n = 1 + \frac{1}{n}$

Donc :

- ▶ Toute suite croissante non-majorée est divergente vers $+\infty$
- ▶ Toute suite décroissante non-minorée est divergente vers $-\infty$

2.6. CRITÈRES DE CONVERGENCE : THÉORÈME DES GENDARMES

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont trois suites telles que

$$u_n \leq v_n \leq w_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$$

► variantes utiles.

2.6. CRITÈRES DE CONVERGENCE : RELATIONS AVEC LES FONCTIONS

- ▶ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $u_n = f(n)$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

- ▶ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $u_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x).$$

- ▶ rappels sur les limites de fonction numériques : fractions rationnelles, e^x , $\ln(x)$ et x^α .

2.7. SUITE GÉOMÉTRIQUE

La suite géométrique est l'outil privilégié pour l'étude de phénomène à croissance (ou décroissance) exponentielle (exemple : carbone 14, populations).

Définitions :

Soit $r \in \mathbb{R}$ un réel donné,

- ▶ la suite **géométrique** de raison r est définie par le terme général $u_n = u_0 r^n$
- ▶ la suite **arithmétique** de raison r est définie par le terme général $u_n = u_0 + rn$
- ▶ ce sont des suites récurrentes (ie. $u_{n+1} = f(u_n)$).

OUTLINE

1. INTRODUCTION

2. SUITES NUMÉRIQUES

3. SÉRIES NUMÉRIQUES

4. SÉRIES ENTIÈRES

3.1. DÉFINITION

Considérons des sommes infinies telles que :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

ou

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

- ▶ Ce sont des sommes d'un nombre infini de termes
- ▶ **Que valent ces sommes ?**
- ▶ On construit (S_n) , la **suite des sommes partielles** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(DÉFINITION) On appelle **série** $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général u_n , la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles

$$S_n = \sum_{i=1}^n u_i :$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

3.1. DÉFINITION

- ▶ La série de terme général u_n est
 - ▶ convergente si $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ est finie
 - ▶ divergente si $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ est infinie

(REMARQUE) Il existe des série indéterminées (somme partielle non finie mais différente de ∞).

(REMARQUE) Une série à termes positifs ne peut être indéterminée.

- ▶ Exemple : $X = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

3.2. CONDITION NÉCESSAIRE DE CONVERGENCE

(THÉORÈME) Pour que la série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente, il faut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

(REMARQUE) Dans la pratique, on utilise souvent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \{u_n\} \text{ diverge}$$

- ▶ Exemple : la série $\{n^2\}$.
- ▶ **Attention : la condition est nécessaire mais non suffisante.**

3.3. SCHÉMA D'ÉTUDE

(Théorèmes)

- ▶ Si (u_n) ne converge pas vers 0, $\{u_n\}$ n'est pas convergente.
- ▶ Si (u_n) ne converge pas vers 0 **et** $u_n > 0$ alors $\{u_n\}$ diverge.

Schéma d'étude de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$

Étudier $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Deux cas possibles :

1. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, chercher un critère de convergence selon le signe de u_n . La série peut converger, diverger ou être indéterminée.
2. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ ou n'existe pas, alors la série diverge ou est indéterminée.

3.4. EXEMPLES FONDAMENTAUX

SÉRIE GÉOMÉTRIQUE : $u_n = a^n, a \in \mathbb{R}$.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a_n + \dots$$

SÉRIE HARMONIQUE : $u_n = \frac{1}{n}$.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

3.5. CRITÈRES DE CONVERGENCE

Ces critères ne donnent pas la somme de la série

(THÉORÈME) Si $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

Les critères sont donc donnés pour des séries à termes positifs.

3.5.1. CRITÈRE DE D'ALEMBERT

Soit $u_n \geq 0$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors

- ▶ $l < 1 \Rightarrow \{u_n\}$ converge
- ▶ $l > 1 \Rightarrow \{u_n\}$ diverge
- ▶ $l = 1 \Rightarrow$ le critère ne permet pas de décider

Exemples :

- ▶ $u_n = \frac{1}{n!}$
- ▶ $u_n = \frac{1}{n}$

3.5.2. CRITÈRE DE CAUCHY

Soit $u_n \geq 0$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, alors

- ▶ $l < 1 \Rightarrow \{u_n\}$ converge
- ▶ $l > 1 \Rightarrow \{u_n\}$ diverge
- ▶ $l = 1 \Rightarrow$ le critère ne permet pas de décider

Exemple : - $u_n = \frac{n}{2^n}$

3.5.3. CRITÈRE DE MAJORATION

Soient $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$, avec $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, telles que

$$0 \leq u_n \leq v_n.$$

- ▶ Si $\{v_n\}$ converge, alors $\{u_n\}$ converge
- ▶ Si $\{u_n\}$ diverge, alors $\{v_n\}$ diverge

Exemple :

- ▶ $u_n = \frac{1}{n^2}$

3.5.4. COMPARAISON À UNE INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE

Si $f(x)$ est une fonction continue, positive et décroissante sur $[0, \infty[$, alors $S = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ et $I = \int_0^{\infty} f(x) dx$ ont le même comportement.

(NOTE) La borne inférieure peut être changée (1 au lieu de 0 par exemple).

(NOTE) On utilise souvent l'intégrale de référence

$$I = \int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

qui converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

Exemple : série de Riemann

(PAUSE) : L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN



FIGURE: Bernahrd Riemann (1826–1866)

La fonction ζ (zêta) de Riemann est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pour s complexe.

HYPOTHÈSE DE RIEMANN Les zéros non-triviaux de ζ sont sur la droite des réels $\frac{1}{2}$.

(PAUSE) : L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN

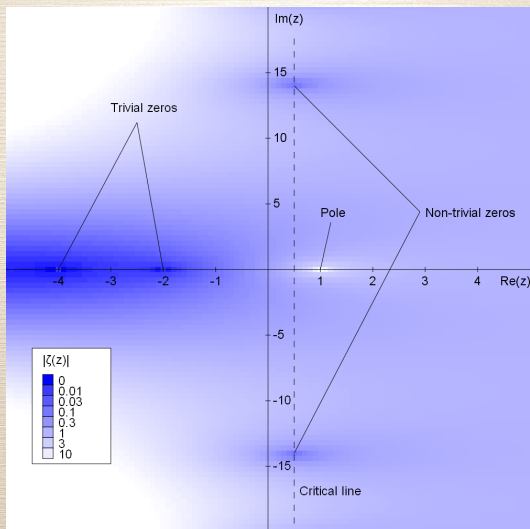


FIGURE: Représentation du module de la fonction zêta de Riemann (Wikipedia)

(PAUSE) : L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN

- ▶ Prix Clay du millénaire : 1 million de dollars.
- ▶ Hypothèse vérifiée pour dix mille milliards de zéros (10^{13}).
- ▶ La fonction permet de relier les nombres entiers et les nombres premiers.

Euler a montré que :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

- ▶ ζ est une série dont le terme général dépend de la variable s

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

- ▶ C'est une série de fonctions : objet que nous allons étudier (en particulier les séries entières).

OUTLINE

1. INTRODUCTION

2. SUITES NUMÉRIQUES

3. SÉRIES NUMÉRIQUES

4. SÉRIES ENTIÈRES

4.1 SÉRIES DE FONCTIONS

(DÉFINITION) Une série de fonctions est une série dont le terme général dépend d'une variable : $u_n(x)$ par exemple.

- ▶ La somme (des termes) est donc également une fonction de x :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Exemples :

- ▶ $\left\{ \frac{x^n}{n} \right\}$ est une **série entière**.
- ▶ $\left\{ \frac{\cos(nx)}{n} \right\}$ est une **série de Fourier**.

4.1.1 DOMAINE DE CONVERGENCE

x étant considéré fixe, la série peut converger ou non.

(DÉFINITION) L'ensemble des x tels que $S(x)$ existe est le **domaine de convergence** \mathcal{D} de la série

Exemple : $\{x^n\}$

- ▶ Une nouvelle question : $u_n(x)$ continue $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ $\{u_n\}$ continue ?

Exemple : $\{x^2(1 - x^2)^n\}$

- ▶ Plus généralement, quelles sont les propriétés de $u_n(x)$ vérifiées également par $\{u_n(x)\}$ et sous quelles conditions ?
- ▶ Il faut préciser la notion de convergence.

4.1.2 CONVERGENCE SIMPLE / UNIFORME / NORMALE

(RAPPEL) La série $\{u_n(x)\}$ **converge simplement** si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n > N_{(x, \epsilon)} \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon.$$

(DÉFINITION) La série $\{u_n(x)\}$ **converge uniformément** si N , dans la définition précédente, ne dépend pas de x .

$$C.U. \Rightarrow C.S.$$

(DÉFINITION) La série $\{u_n(x)\}$ **converge normalement** sur $[a, b]$ s'il existe une série numérique $\{v_n\}$ à termes positifs, convergente, telle que :

$$|u_n(x)| < v_n, \forall x \in [a, b]$$

$$C.N. \Rightarrow C.U. \Rightarrow C.S.$$

4.1.3 PROPRIÉTÉS LIÉES À LA CONVERGENCE UNIFORME

- ▶ Continuité
- ▶ Intégration
- ▶ Dérivation

4.2. SÉRIES ENTIÈRES

4.2.1 DÉFINITION

Le terme général d'une **série entière** s'écrit $u_n(x) = a_n x^n$ où a_n est indépendant de x :

$$\{u_n(x)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

4.2.2 RAYON DE CONVERGENCE

(THÉORÈME) Il existe un réel $\mathcal{R} \geq 0$, nommé **rayon de convergence**, tel que la série $\{a_n x^n\}$ est *absolument et uniformément* convergente pour $|x| < \mathcal{R}$, et divergente pour $|x| > \mathcal{R}$.

(NOTE) Il est nécessaire d'étudier spécifiquement la convergence en $\pm \mathcal{R}$

(CONSÉQUENCE) Si $u_n(x)$ est continue $\forall x$ et $\{u_n(x)\}$ C.U.
 $\forall |x| < \mathcal{R}$, alors la série $\{u_n(x)\}$ est continue pour $|x| < \mathcal{R}$.

4.2.3 DÉTERMINATION DU RAYON DE CONVERGENCE

(Théorème) Pour x fixé, \mathcal{R} est déterminé en appliquant le **critère de d'Alembert** à la série $\{|u_n(x)|\}$.

- ▶ Exemple : $\{x^n\}$.
- ▶ Exemple : $\{\frac{x^n}{n!}\}$.

4.3. OPÉRATIONS SUR LES D.S.E. (DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES ENTIÈRES)

- ▶ Sommes et produits
- ▶ Dérivation et intégration

- ▶ **Exemple important** : dérivation de $\left\{ \frac{x^n}{n!} \right\}$

4.3. ÉQUATION D'ANALYSE : QUELS SONT LES COEFFS D'UN D.S.E. ?

(DÉFINITION) Soit $f(x)$ admettant un D.S.E. de rayon de convergence \mathcal{R} . Il est donné par (D.S.E. de MacLaurin) :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

- ▶ Démonstration
- ▶ Lien avec le développement limité
- ▶ Exemples : $\sin(x)$, $\cos(x)$, $(1+x)^\alpha$, ...

4.4. LIEN AVEC LA TRANSFORMÉE EN z

- ▶ Un **signal numérique** est une application s de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} .
- ▶ Si $\forall n < 0, s(n) = 0$ alors le signal numérique s est dit **causal**
- ▶ n représente en général *le temps* discrétisé (ou l'espace monodimensionnel).

4.4. LIEN AVEC LA TRANSFORMÉE EN z

(DÉFINITION) La **transformée en z** d'un signal numérique s est la fonction $\mathcal{T}_z(s)$ de la variable complexe z :

$$\mathcal{T}_z(s)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n)z^{-n}.$$

- ▶ **c'est une série entière**
- ▶ z ne représente rien de particulier, c'est une abstraction.

Pour les signaux causaux, \mathcal{T}_z est la transformée en z monolatérale :

$$\mathcal{T}_{z^+}(s)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s(n)z^{-n}.$$

4.4. QUELQUES RÉSULTATS RAPIDES SUR \mathcal{T}_z

(COURONNE DE CONVERGENCE) le domaine de convergence \mathcal{C}
(ie. les z tq $T_z(s)$ existe) définit une couronne :

$$\mathcal{C}_{(r,R)} = z \in \mathbf{C}, r < |z| < R$$

(éventuellement $r = 0$).

Formulaire succinct :

- ▶ $\mathcal{T}_z\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1\mathcal{T}_z\{x_1(n)\} + a_2\mathcal{T}_z\{x_2(n)\}$
(linéarité)
- ▶ $\mathcal{T}_z\{x(n-k)\} = z^{-k}\mathcal{T}_z\{x(n)\}$ (retard)
- ▶ $\mathcal{T}_z\{x+y\} = \mathcal{T}_z\{x\}\mathcal{T}_z\{y\}$ (convolution discrète)