MA32 (GEII - S3)

B - Fonctions à plusieurs variables

F. Morain-Nicolier

frederic.nicolier@univ-reims.fr

2011 - 2012 / URCA - IUT Troyes

OUTLINE

1. FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES

2. INTÉGRALES MULTIPLES (DOUBLES)

1.1. DÉFINITION

- On appelle fonction de plusieurs variables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, d'ensemble de définition $D \subseteq \mathbb{R}$, toute application définie par :

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\to f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

- Exemples
- La détermination du domaine de définition est essentielle !

1.2. GRAPHES

- Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction à deux variables.
- graphe : ensembles de points $(x, y, f(x, y))$.

- $y = f(x)$: représente une courbe (C)dans le plan
- $z = f(x, y)$: représente une surface (S)- dans l'espace 3D.

- **Difficile à représenter**
- graphes des sections $x = K, y = K$ et $z = K$

1.2. GRAPHES : EXEMPLE 1

Soit $f(x,y) = x^2y$.

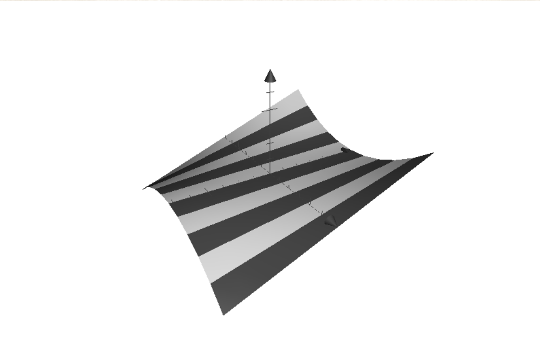

FIGURE: *Graphe de* $f_K(y) = K^2y$

1.2. Graphes : exemple 1 -

Soit $f(x,y) = x^2 y$.

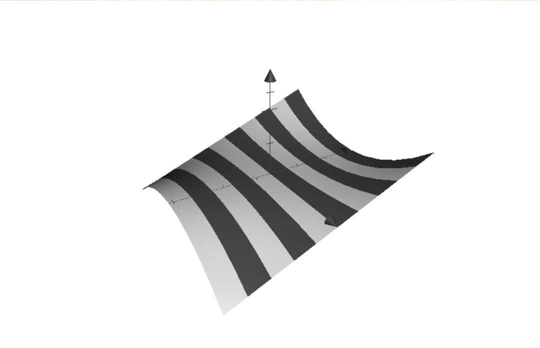

FIGURE: *Graphe de* $f_K(x) = Kx$

1.2. Graphes : exemple 1

Soit $f(x, y) = x^2y$.

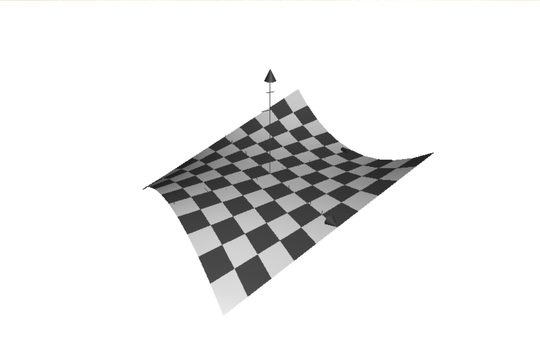

Figure: *Graphe de* $f(x, y) = x^2y$

1.2. GRAPHES : EXEMPLE 2

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$.

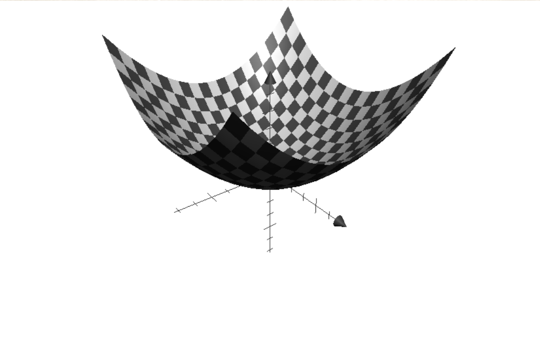

FIGURE: *Graphe de* $f(x, y) = x^2 + y^2$

1.2. Graphes : exemple 3

Soit $f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$.

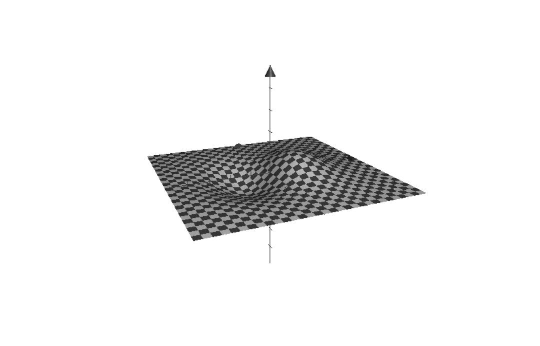

Figure: *Graphe de* $f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$

1.2. Graphes : exemple 3

Soit $f(x,y) = xe^{-(x^2+y^2)}$.

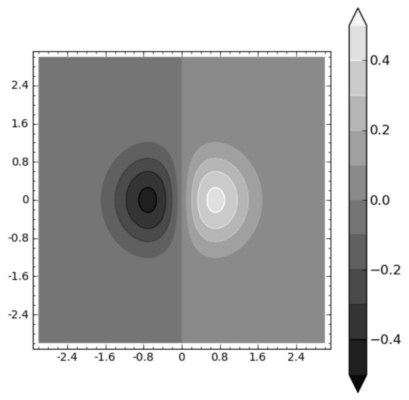

FIGURE: *Graphe de* $f(x,y) = K$

1.3. Limite et continuité

Soit M_0 un point du domaine de définition D d'une fonction f à plusieurs variables.

Définition f est continue en M_0 ssi

1. f est définie au voisinage de M_0
2. $f(M)$ tend vers $f(M_0)$ lorsque M tend vers M_0

1.4. DÉRIVÉES PARTIELLES - DÉFINITIONS

Comment varient les valeurs de f ?

$\Rightarrow$ utilisation des *dérivées partielles*.

DÉFINITION Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans $\mathbb{R}^2$, on appelle **dérivée partielle** de f par rapport à x, la fonction obtenue en dérivant $f(x, y)$ par rapport à x et **en considérant y constant**.

- On note cette dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ou } \frac{\partial}{\partial x} f$$

1.5. Dérivée d'ordre supérieur à 1 - Théorème de Schartz

- Raisonnons avec deux variables.

- Si les dérivées partielles de f existent et sont dérivables sur D, leurs dérivées partielles sont pour f des dérivées partielles secondes.

- $\frac{\partial f}{\partial x}$ dérivable $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
- $\frac{\partial f}{\partial y}$ dérivable $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Exemple $f(x,y) = e^x \ln y + \sin(xy)$.

1.5. Dérivée d'ordre supérieur à 1 - Théorème de Schartz

Théorème (de Schwartz)
Si $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sont continues en $M = (x, y)$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$\Rightarrow$ L'ordre des dérivées partielles n'importe pas.

1.6. DIFFÉRENTIELLES

- Rappelons la notion de **différentielle** pour une fonction à une variable $f(x$.

$\Rightarrow$ différentielle de f = produit de la dérivée par la différentielle de la variable :

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x.$$

(Généralisation à plusieurs dimensions)

différentielle de f = **somme** des produits entre les **dérivées partielles** et les différentielles des variables.

- Exemple (à deux variables)

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

1.7 Analyse vectorielle

C'est l'analyse des champs (*ie.* espaces) tensoriels.

- tenseur d'ordre 1 : champ scalaire. *À chaque point de l'espace est associé un nombre (ex. température, pression, ...).*
- tenseur d'ordre 2 : champ vectoriel. *À chaque point de l'espace est associé un vecteur (ex. gravité,* ***champ électromagnétique****).*
- tenseur d'ordre 3 : champ matriciel. *À chaque point de l'espace est associé une matrice (ex. contraintes, déformation).*

On défini des opérations sur ces champs : **gradient**, **divergence** et **rotationnel**.

Très utilisé en électromagnétisme (équations de Maxwell), mécanique des fluides, propagation, ...

1.7 Analyse vectorielle : gradient

Indique de quelle façon le champ varie dans l'espace. Il est donc défini à partir des dérivées partielles. C'est un vecteur. Soit f une fonction à trois variables :

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\to f(x, y, z) \end{aligned}$$

Le gradient est un opérateur qui s'applique à un **champ de scalaires** et le transforme en un **champ de vecteurs**.

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.7 Analyse vectorielle : gradient

Pratiquement, le gradient indique la direction de la plus grande variation du champ scalaire, et l'intensité de cette variation. Par exemple, le gradient de l'altitude est dirigé selon la ligne de plus grande pente et sa norme augmente avec la pente.

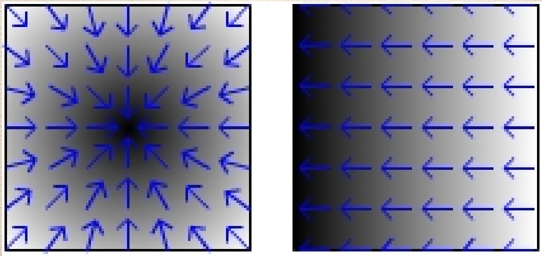

FIGURE: *Deux exemples de gradients*

1.7 Analyse vectorielle : divergence

La **divergence** transforme un champ vectoriel en champ scalaire.

Soit **F** un champ de vecteur :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Utilisé lorsque des flux sont présents.

1.7 Analyse vectorielle : rotationnel

Le **rotationnel** transforme un champ vectoriel en un autre champ vectoriel.

Soit **F** un champ de vecteur :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial F_z/\partial y - \partial F_y/\partial z \\ \partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x \\ \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y \end{pmatrix}$$

Il exprime la tendance d'un champ à tourner autour d'un point.

Outline

1. Fonctions à plusieurs variables

2. Intégrales multiples (doubles)

2.1. Retour sur l'intégrale simple

- L'intégrale simple permet de calculer l'aire délimitée par une courbe plane.

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{x_i} f(x_i)\Delta x_i.$$

- L'intégrale double va permettre de calculer le **volume** délimité par une surface tri-dimensionnelle.

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2.2. Intégrale double : définition

$$V = \lim_{\Delta x_i \to 0} \lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{x_i} \sum_{y_i} f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i.$$

On note

$$V = \iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \qquad (*)$$

2.3. Méthode de calcul

Raisonnons sur

$$V \simeq \sum_{x_i} \sum_{y_i} f(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i.$$

Au final :

$$V = \iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \qquad (\text{n}otation)$$

$$V = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_0(x)}^{y_1(x)} f(x,y) \mathrm{d}y. \qquad \text{(ordre de calcul 1 : y puis x)}$$

$$V = \int_d^c \mathrm{d}y \int_{x_0(y)}^{x_1(y)} f(x,y) \mathrm{d}x. \qquad \text{(ordre de calcul 2 : x puis y)}$$

Théorème Si $f(x,y)$ est continue sur D, quelque soit le partage, il existe une **limite unique** V lorsque les Δx_i et Δy_i tendent vers 0.

2.4. Exemples

a) Soit le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq x^2, 1 \leq x \leq 2\}$, calculons

$$I_a = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

avec

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

b) Calculons $I_b = \iint_D e^{x2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D désigne l'intérieur du triangle $(0, 0) - (1, 0) - (1, \frac{1}{3})$.

2.5. Propriétés de l'intégrale double

- Linéarité

$$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\alpha \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Partition du domaine

Si $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, alors

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2.6. Intégrales séparables

Si D est un domaine rectangulaire et parallèle aux axes et si f est une fonction **séparable**, *ie.*

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

alors

$$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_c^d h(y)\mathrm{d}y\right).$$

- L'intégrale se ramène à produit de deux intégrales simples
- Un changement de variable permet parfois d'obtenir la séparabilité.

2.7. Changement de variables dans une intégrale double

Soient Δ et D de $\mathbb{R}^2$ et φ une application :

$$\varphi : \Delta \to D$$

$$(x, y) \to (s, t)$$

Soit donc le changement de variables $x = x(s, t)$ et $y = y(s, t)$, *ie.*

$$f(x, y) = f(x(s, t), y(s, t)) = F(s, t)$$

Alors

$$\iint_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} F(s, t) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right| \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

où $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ est le **jacobien** de φ :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

2.8. Applications aux coordonnées polaires