MA31 (GEII - S3)

C - Transformation de Fourier

F. Morain-Nicolier

frederic.nicolier@univ-reims.fr

2011 - 2012 / URCA - IUT Troyes

Outline

1. Des séries de Fourier aux intégrales de Fourier

- DSF : Analyse harmonique (fonction périodiques)
- TF : généralisation aux fonctions non-périodiques

1.1. “Avec les mains”

1.1. “Avec les mains”

- **Toutes les fréquences sont présentes dans le spectre d’une fonction non-périodique**

1.2. Obtention des intégrales de la TF

1.2. Obtention des intégrales de la TF

- Équation de synthèse :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega.$$

- Équation d'analyse

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

1.2. Obtention des intégrales de la TF

- Équation de synthèse :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega.$$

- Équation d'analyse

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

Pour mémoire, pour une fonction périodique :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

et

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-in\omega t} \mathrm{d}t.$$

- **Les propriétés du DSF sont (*en général*) retrouvée avec la TF.**

1.3. Diverses répartitions de la constante

- La constante 2π peut se répartir différemment entre les deux équations, selon la communauté.

Outline

2.1 Existence

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

2.1 Existence

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t.$$

Pour que $F(\omega)$ existe, il faut que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

C'est une condition très restrictive !

2.2 Convergence

2.2 Convergence

Si $f(t)$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, sa représentation fréquentielle converge vers

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- La représentation fréquentielle de $f(t)$ converge donc vers $f(t)$ si $f(t)$ est continue.

Outline

3. Un exemple : créneau rectangulaire symétrique

Soit c défini par

$$c(x) = \begin{cases} A & \text{si } |x| \leq \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Cherchons sa transformée de Fourier

3. Un exemple : créneau rectangulaire symétrique

Soit c défini par

$$c(x) = \begin{cases} A & \text{si } |x| \leq \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa représentation fréquentielle est

$$C(\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin(\omega\tau).$$

Outline

4. Formule de Parseval-Plancherel

L'énergie de la fonction f :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

peut être calculée dans le domaine fréquentiel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.$$

Outline

De façon analogue au DSF, les spectres sont donnés par :

- spectre d'amplitude : $|F(\omega)|$
- spectre de phase : $\arg F(\omega)$
- le spectre d'énérgie $|F(\omega)|^2$ donne la répartition de l'énergie en fonction de ω.

5.1. Exemple : spectre d'énergie du créneau de largeur 2τ

Soit c défini par

$$c(x) = \begin{cases} A & \text{si } |x| \leq \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa représentation fréquentielle est (*c.f.* 3)

$$C(\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin(\omega\tau).$$

- Cherchons (et représentons) $|F(\omega)|^2$.

5.1. Exemple : spectre d'énergie du créneau de largeur 2τ

- **Relation d'indétermination ou d'incertitude** :

$$\Delta t . \Delta \nu = 1$$

- *Plus un signal est court temporellement, plus sa représentation fréquentielle est large.*
- exemple : notes de musique.

Outline

6.1. Un créneau particulier : l'impulsion de Dirac

6.1. Un créneau particulier : l'impulsion de Dirac

$\delta(t)$ vérifie :

i) $\forall t, \delta(t) \geq 0$

ii) $\delta(t) = 0$ si $t \neq 0$

iii) $\int_{\mathbb{R}} \delta(t) \mathrm{d}t = 1$

- Ces trois conditions sont incompatibles pour les fonctions

6.1. Un créneau particulier : l'impulsion de Dirac

Les théoriciens de la physique des particules vers 1920–30 (dont Paul Dirac, 1902–1984), on introduit la "fonction" $\delta(t)$ vérifiant "de gré ou de force" :

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty & \text{si } t = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \delta(t) \mathrm{d}t = 1. & \end{cases}$$

- Représentation graphique ?
- Formalisme facilement exploitable

6.2. Exemple : calcul de l'intégrale du produit d'un dirac et d'une fonction

6.3. DÉRIVATION "NEW LOOK"

6.3. Dérivation "new look"

- 1946 : proposition d'une théorie complète (*théorie des distributions*) par Laurent Schwartz (1915 - 2002)

Outline

Outline

Outline