

MA31 (GEII - S3)

B - DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE FOURIER

F. Morain-Nicolier

frederic.nicolier@univ-reims.fr

2011 - 2012 / URCA - IUT Troyes

OUTLINE

1. DSF À COEFFICIENTS RÉELS

2. CALCULS DES COEFFICIENTS RÉELS

3. FORME COMPLEXE DU DSF

4. SPECTRES DE FOURIER

5. PROPRIÉTÉS DU DSF

1.1. DSF : DÉFINITION

Une fonction f périodique de période T (et donc de pulsation ω) peut être décomposée en une somme infinie de sinusoïdes de pulsations multiples de ω .

Le DSF (développement en série de Fourier) de f s'écrit :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

1.2. RAPPELS

- ▶ Fréquence, pulsation, période
- ▶ Intégrales :
 - ▶ d'une fonction T -périodique
 - ▶ d'une fonction paire, d'une fonction impaire
 - ▶ de cosinus et sinus

OUTLINE

1. DSF À COEFFICIENTS RÉELS

2. CALCULS DES COEFFICIENTS RÉELS

3. FORME COMPLEXE DU DSF

4. SPECTRES DE FOURIER

5. PROPRIÉTÉS DU DSF

2.1. ÉQUATIONS D'ANALYSE

Les coefficients a_n et b_n peuvent être obtenus à partir des intégrales suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt.$$

(voir TD pour les détails)

2.2. CAS PARTICULIERS

- ▶ Pas de sinus dans le DSF d'une fonction paire :

$$f \text{ paire} \iff f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

- ▶ Pas de cosinus dans le DSF d'une fonction impaire :

$$f \text{ impaire} \iff f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

2.3. EXEMPLE : SIGNAL RECTANGULAIRE PÉRIODIQUE

Soit f de période T , définie par

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{T}{2} < t \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Le DSF de f est

$$f(t) \stackrel{?}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin((2p+1)\omega t)}{2p+1}.$$

2.3. EXEMPLE : CONVERGENCE DU SIGNAL RECTANGULAIRE PÉRIODIQUE

OUTLINE

1. DSF À COEFFICIENTS RÉELS

2. CALCULS DES COEFFICIENTS RÉELS

3. FORME COMPLEXE DU DSF

4. SPECTRES DE FOURIER

5. PROPRIÉTÉS DU DSF

3.1. EQUATIONS DE SYNTHÈSE ET D'ANALYSE

Le DSF d'une fonction périodique réelle

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

peut également s'écrire comme (eq. de synthèse)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}.$$

Les coefficients c_n sont obtenus (eq. d'analyse) par

$$c_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-in\omega t} dt.$$

3.2. RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS RÉELS ET COMPLEXES

Montrons que

$$\begin{cases} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_n}. \end{cases}$$

3.3. DSF COMPLEXE : RELATIONS DE PARITÉ

OUTLINE

1. DSF À COEFFICIENTS RÉELS

2. CALCULS DES COEFFICIENTS RÉELS

3. FORME COMPLEXE DU DSF

4. SPECTRES DE FOURIER

5. PROPRIÉTÉS DU DSF

4.1. SPECTRES D'AMPLITUDE ET DE PHASE

Le DSF d'une fonction périodique réelle

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

peut également s'écrire uniquement sous la forme d'une somme de cosinus déphasés :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n).$$

Il est alors possible de tracer deux graphes :

- ▶ le spectre d'amplitude A_n
- ▶ le spectre de phase ϕ_n

4.2. SPECTRES À PARTIR DES COEFFICIENTS RÉELS

On montre que

$$A_n = \begin{cases} |a_0| & \text{pour } n = 0 \\ \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & \text{pour } n > 0. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \sin \phi_n & = \frac{-b_n}{A_n}, \\ \cos \phi_n & = \frac{a_n}{A_n}. \end{cases}$$

4.3. SPECTRES À PARTIR DES COEFFICIENTS COMPLEXES

Le DSF complexe d'une fonction est

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}.$$

En écrivant

$$c_n = |c_n| e^{i\phi_n}$$

il est aisé de représenter :

- ▶ le spectre d'amplitude : $|c_n|$
- ▶ et le spectre de phase : $\arg c_n$.

4.4. UN EXEMPLE

Reprenons le signal rectangulaire $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \frac{T}{2} < t \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$

Le DSF de f est $f(t) \stackrel{?}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin((2p+1)\omega t)}{2p+1}$.

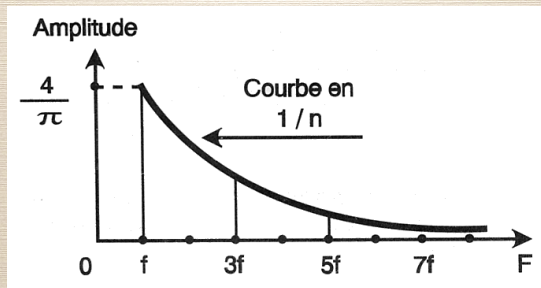


FIGURE: *Spectre d'amplitude d'un signal rectangulaire*

OUTLINE

1. DSF À COEFFICIENTS RÉELS
2. CALCULS DES COEFFICIENTS RÉELS
3. FORME COMPLEXE DU DSF
4. SPECTRES DE FOURIER
5. PROPRIÉTÉS DU DSF

5.1. RELATIONS DE PARITÉ

DSF complexe d'une fonction f :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\omega t},$$

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-in\omega t} dt.$$

- ▶ fonction réelle ?
- ▶ fonction paire, impaire ?
- ▶ fonction réelle paire, réelle impaire ?

5.2. SUPERPOSITION

Soient f et g , que vaut le DSF de $\lambda f + \mu g$?

5.2. SUPERPOSITION

$$c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g).$$

- ▶ **Propriété de linéarité** (à condition que f et g soient de même période)

5.3. TRANSLATION

Soit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\omega t},$$

la translation de f par a est

$$g(t) = f(t - a)$$

($a > 0$: décalage à droite).

\Rightarrow quelle est l'expression de $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$?

5.3. TRANSLATION

Soit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\omega t},$$

la translation de f par a est

$$g(t) = f(t - a)$$

($a > 0$: décalage à droite).

Alors :

$$c_n(g) = c_n(f) e^{-in\omega a}.$$

► effet sur le spectre d'amplitude ?

5.4. DILATATION

Soit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\omega t},$$

la dilatation de f par λ est

$$g(t) = f(\lambda t)$$

($t > 1$: contraction).

\Rightarrow quelle est l'expression de $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$?

5.4. DILATATION

Soit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\omega t},$$

la dilatation de f par λ est

$$g(t) = f(\lambda t)$$

($t > 1$: contraction).

Alors :

$$c_n(g) = c_n(f).$$

► la dilatation n'a aucun effet sur les coefficients du DSF!

5.5. DÉRIVATION

Soit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{in\omega t}.$$

\Rightarrow quelle est l'expression de $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$?

5.5. DÉRIVATION

THÉORÈME Si f est dérivable et si f' possède un DSF, alors

$$c_n(f') = in\omega c_n(f).$$

- ▶ dérivée d'ordre n ?

6. FORMULE DE PARSEVAL

- ▶ **Comment s'exprime l'énergie totale d'une fonction dans les domaines temporels et fréquentiels ?**

6.1. ÉNERGIE TOTALE D'UNE FONCTION

L'énergie totale d'une fonction périodique f , notée $\|f\|^2$, (si elle existe) est définie par

$$\|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_T f^2(t) dt.$$

6.2. FORMULE DE PARSEVAL

Cherchons à exprimer $\|f\|^2$ en fonction du DSF de f .

6.2. FORMULE DE PARSEVAL

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

- ▶ **L'énergie totale ne dépend pas de la représentation choisie : fréquentielle ou temporelle.**

6.3. CONSÉQUENCE : APPROXIMATION D'UNE FONCTION

6.3. CONSÉQUENCE : APPROXIMATION D'UNE FONCTION

Il est possible d'**approximer** une fonction périodique f par une **somme finie** d'harmoniques :

$$f(t) \simeq a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

7. CONVERGENCE DU DSF

7.1. ERREUR SUR L'APPROXIMATION D'UNE FONCTION

7.2. CONVERGENCE EN MOYENNE ABSOLUE OU QUADRATIQUE

7.3. CONVERGENCE PONCTUELLE

7.4. THÉORÈME DE DIRICHLET

Une fonction f, T -périodique, possède une représentation de fourier valide, *i.e.* $f_N(t) \rightarrow f(t)$ (convergence ponctuelle) si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. f est absolument intégrable ($f \in L^1$), *i.e.*

$$\int_T |f(t)| dt < \infty.$$

2. Pour chaque point t du domaine de f , les limites à gauche et à droite, $f(t^+)$ et $f(t^-)$, existent et

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

3. Les points où f est discontinue sont en nombre fini.