

Capteurs - Incertitudes

F. Morain-Nicolier

Capteurs, 2008-2009 Département Geii URCA

Sommaire

Table des matières

1	Utilité et définition	1
2	Comment se propagent les incertitudes	2
2.1	Somme	2
2.2	Produit	3
2.3	Fonction	4
2.4	Cas d'une expérience de comptage	5
2.5	Fonction à plusieurs variables	5
3	Incertitudes normalisées	7
3.1	Incertitudes-types	8
3.2	Incertitudes composée et élargie	8
3.3	Écriture du résultat de mesure	8
4	La distribution est-elle gaussienne ? (le test du χ^2 en accéléré)	9

1 Utilité et définition

Utilité de l'incertitude

– Aucun résultat de mesure d'une grandeur G ne peut être parfait. On ne peut avoir :

$$m(G) = G \quad (1)$$

– En réalité :

$$m(G) = G + \varepsilon \quad (2)$$

– ε ne peut être connue pour chaque mesure

– On cherche donc à écrire :

$$m(G) - \delta G < G < m(G) + \delta G \quad (3)$$

$$\Rightarrow |\varepsilon| \leq \delta G \quad (4)$$

vers une définition

- Cela est incompatible avec les mesures scientifiques, sauf à choisir une valeur δG tellement élevée qu'elle ne signifie plus rien
- On choisit donc δG tel que l'on est "**raisonnablement certain**" que la quantité mesurée évolue entre $m(G) - \delta G$ et $m(G) + \delta G$
- L'incertitude d'une mesure traduit donc les tentatives scientifiques pour estimer l'importance de l'erreur commise

Definition 1 (incertitude). Paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuée au mesurande

2 Comment se propagent les incertitudes

Posons le problème

- Imaginons que l'on ait mesuré deux grandeurs X et $Y \Rightarrow m(X)$ et $m(Y)$, avec leurs incertitudes δX et δY .
- Une troisième grandeur Q est liée par une loi physique à X et Y .
- Comment obtenir $m(Q)$ à partir de :
 - $m(X)$ et $m(Y)$
 - δX et δY
 - $Q = f(X, Y)$
- Nous allons procéder par étapes en trouvant d'abord des règles provisoires (simples)

2.1 Somme

Règles provisoires (cas d'une somme)

Dans le cas d'une somme, la loi physique qui relie Q à X et Y est

$$Q = X + Y \tag{5}$$

$$m(X) - \delta X < X < m(X) + \delta X \tag{6}$$

$$m(Y) - \delta Y < Y < m(Y) + \delta Y \tag{7}$$

$$m(X) - \delta X + m(Y) - \delta Y < X + Y < m(X) + \delta X + m(Y) + \delta Y \tag{8}$$

$$m(X) + m(Y) - \delta X - \delta Y < Q < m(X) + m(Y) + \delta X + \delta Y \tag{9}$$

$$m(Q) - \delta Q < Q < m(Q) + \delta Q \tag{10}$$

Donc :

$$\delta Q = \delta X + \delta Y \tag{11}$$

Les incertitudes **absolues** s'ajoutent dans le cas d'une loi physique somme.

2.2 Produit

Cas du produit

- La loi physique qui relie Q à X et Y est alors $Q = X.Y$
- Les mesures de X et Y sont notées x et y :

$$X = x \pm \delta x = x \left(1 \pm \frac{\delta x}{|x|} \right) \quad (12)$$

$$Y = y \pm \delta y = y \left(1 \pm \frac{\delta y}{|y|} \right) \quad (13)$$

$$Q = X.Y \quad (14)$$

$$= x \left(1 \pm \frac{\delta x}{|x|} \right) . y \left(1 \pm \frac{\delta y}{|y|} \right) \quad (15)$$

- La plus grande valeur possible est :

$$q + \delta Q = xy \left(1 + \frac{\delta x}{|x|} \right) \left(1 + \frac{\delta y}{|y|} \right) \quad (16)$$

Cas du produit

$$q + \delta Q = xy \left(1 + \frac{\delta x}{|x|} \right) \left(1 + \frac{\delta y}{|y|} \right) \quad (17)$$

$$= xy \left(1 + \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} + \frac{\delta x \delta y}{|x| |y|} \right) \quad (18)$$

- δx doit être petit devant x (sinon la mesure n'a pas de sens)

$$\frac{\delta x}{|x|} \ll 1 \quad (19)$$

$$\frac{\delta x \delta y}{|x| |y|} \ll \frac{\delta x}{|x|} \quad (20)$$

- Il reste donc

$$q + \delta Q = xy \left(1 + \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} \right) \quad (21)$$

$$= q \left(1 + \frac{\delta q}{|q|} \right) \quad (22)$$

Cas du produit

- Avec le même traitement pour la plus petite valeur possible, on obtient :

$$q \left(1 + \frac{\delta q}{|q|} \right) = xy \left(1 + \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} \right) \quad (23)$$

$$q \left(1 - \frac{\delta q}{|q|} \right) = xy \left(1 - \frac{\delta x}{|x|} - \frac{\delta y}{|y|} \right) \quad (24)$$

– Donc au final :

$$\frac{\delta q}{|q|} = \frac{\delta x}{|x|} + \frac{\delta y}{|y|} \quad (25)$$

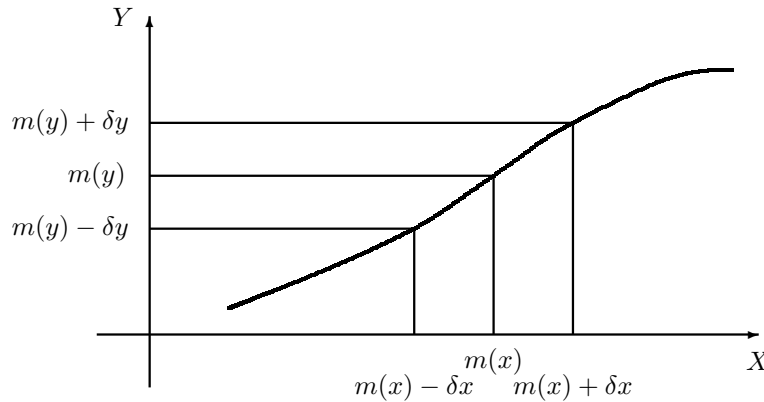
– Les incertitudes relatives s'**ajoutent** dans le cas d'un loi physique produit.

2.3 Fonction

Cas d'une fonction : mise en place

– La loi physique est une formule générale :

$$Y = f(X) \quad (26)$$



Cas d'une fonction : incertitude

– On a donc :

$$\delta y = (m(y) + \delta y) - m(y) \quad (27)$$

$$= f(m(x) + \delta x) - f(m(x)) \quad (28)$$

– Si $\delta x \ll x$, approximation (locale) de f à une droite :

$$\rho = \left. \frac{df}{dx} \right|_{m(x)} \quad (29)$$

$$= \frac{f(m(x) + \delta x) - f(m(x))}{\delta x} \quad (30)$$

$$= \frac{\delta y}{\delta x} \quad (31)$$

$$\Rightarrow \delta y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{m(x)} \delta x \quad (32)$$

Cas d'une fonction : généralisation

– Nous avons donc obtenu :

$$\delta y = \left. \frac{df}{dx} \right|_{m(x)} \delta x$$

- Mais si $\rho < 0$, $\left. \frac{df}{dx} \right|_{m(x)} < 0$ et donc $\delta y < 0$
- Hors une incertitude doit être positive
- Donc au final :

$$\delta y = \left| \left. \frac{df}{dx} \right|_{m(x)} \right| \delta x \quad (33)$$

2.4 Cas d'une expérience de comptage

Comptage

– Comptage d'évènement aléatoires mais de moyenne définie

Exemples 2. – naissances dans un hopital

- sur des durées courtes : aléatoire
- sur de longues durées : taux moyen constant
- Par exemple, 28 naissances pour un mois donné
- nombre exact pour ce mois là
- mais différent de la véritable moyenne des naissances/mois

$$\delta = \sqrt{m(\cdot)} \quad (34)$$

– ex : naissances/mois = 28 ± 5

2.5 Fonction à plusieurs variables

Incertitudes absolues

– Dans le cas général, $q = f(\dots)$. Par exemple

$$q = a \sin b = f(a, b) \quad (35)$$

– Méthode :

1. calculer la différentielle dq :

$$dq = \left. \frac{\partial f}{\partial a} \right|_b da + \left. \frac{\partial f}{\partial b} \right|_a db \quad (36)$$

2. remplacer les différentielles par des incertitudes :

$$\delta q = \|dq\| \quad (37)$$

Choix d'une norme

1. (Correspond à la règle provisoire) : sommer les normes des termes :

$$\delta q = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \delta b \quad (38)$$

- Cette expression surestime δq .
- Si l'on tient compte de la statistique des variables :
 - variables indépendantes
 - distributions gaussiennes

$$\delta q = \sqrt{\left(\left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \delta a \right)^2 + \left(\left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \delta b \right)^2} \quad (39)$$

Incertitudes absolue : exemple

$$\begin{aligned} q &= a \sin b \\ &= f(a, b) \\ \frac{\partial f}{\partial a} &= \sin b \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= a \cos b \\ \Rightarrow dq &= \left(\frac{\partial f}{\partial a} \right)_b da + \left(\frac{\partial f}{\partial b} \right)_a db \\ &= \sin b \cdot da + a \cos b \cdot db \\ \Rightarrow \delta q &= |\sin b| \delta a + |a \cos b| \delta b \\ &\text{ou} \\ \delta q &= \sqrt{|\sin b|^2 \delta a^2 + |a \cos b|^2 \delta b^2} \end{aligned}$$

Incertitudes relatives

- Méthode :
 - prendre le logarithme de la fonction
 - différentier
 - regrouper les termes relatifs à une même différentielle
 - passer aux incertitudes (choix d'une norme)

Incertitudes relatives : exemple

$$\begin{aligned}
q &= a \sin b \\
\ln q &= \ln(a \sin b) \\
&= \ln a + \ln(\sin b) \\
d \ln q &= \frac{d \ln q}{dq} dq \\
&= \frac{1}{q} dq \\
\Rightarrow \frac{dq}{q} &= d [\ln a + \ln(\sin b)] \\
&= d \ln a + d \ln(\sin b) \\
&= \frac{da}{a} + \frac{d \sin b}{\sin b} \\
d \sin b &= \frac{d \sin b}{db} db \\
&= \cos b \cdot db
\end{aligned}$$

Incertitudes relatives : exemple (suite)

$$\begin{aligned}
\frac{dq}{q} &= \frac{da}{a} + \frac{\cos b \cdot db}{\sin b} \\
&= \frac{da}{a} + \frac{db}{\tan b} \\
\left\| \frac{dq}{q} \right\| &= \frac{\delta q}{q} \\
\frac{\delta q}{q} &= \left\| \frac{da}{a} + \frac{db}{\tan b} \right\| \\
\Rightarrow \frac{\delta q}{q} &= \frac{1}{|a|} \delta a + \frac{1}{|\tan b|} \delta b \\
&\text{ou} \\
\frac{\delta q}{q} &= \sqrt{\frac{1}{|a|^2} \delta a^2 + \frac{1}{|\tan b|^2} \delta b^2}
\end{aligned}$$

3 Incertitudes normalisées

Incertitudes normalisées

- Les calculs d'incertitudes de mesures sont réglementées par les normes ISO et la référence NIST TN1297
- Procédure :
 1. évaluation des incertitudes de type A et B
 2. incertitude composée

- 3. incertitude élargie
- 4. écriture du résultat de mesure
- L’incertitude exprimée conformément aux normes est appelée **incertitude-type** u .

3.1 Incertitudes-types

Incertitudes types

- Les normes définissent deux type d’incertitudes :

de type A évaluées à partir du *traitement statistique* des mesures. L’incertitude-type u_A est exprimée à partir de l’écart-type des mesures.

de type B ne sont pas déterminées par le traitement statistique des mesures. L’incertitude-type u_B est issue des données du constructeur ou des données techniques (calibre, incertitude sur la valeur d’une résistance, ...).

3.2 Incertitudes composée et élargie

Incertitude composée

Definition 3. Lorsque la mesure d’une grandeur G est entachée d’incertitudes de type A et B , l’incertitude-type composée est :

$$u_c = \sqrt{\sum_A u_A^2(G) + \sum_B u_B^2(G)} \quad (40)$$

Incertitude élargie

Definition 4. L’incertitude-type élargie U est :

$$U = k.u_c \quad (41)$$

- k est un coefficient d’élargissement (ou facteur d’élargissement ou coefficient de sécurité)
- **En l’absence de toute étude complémentaire ou de toute information à priori, la norme conseille d’utiliser un facteur d’élargissement égal à 2**

3.3 Écriture du résultat de mesure

Écriture du résultat

- Principe :
 - tout résultat de mesure doit s’écrire avec une **incertitude** et avec les **unités appropriées**.
 - limiter le nombre de chiffres significatifs à l’aide de l’incertitude. On retient en général **deux chiffres significatifs** pour l’incertitude.

- Exemples :
 - On mesure $R = 100,2513\Omega$, avec une incertitude-type élargie $U = 0,8123\Omega$:

$$R = (100,25 \pm 0,81)\Omega$$

- On mesure $R = 100,0021\Omega$, avec une incertitude-type élargie $U = 1,025\Omega$:

$$R = (100,0 \pm 1,0)\Omega$$

4 La distribution est-elle gaussienne ? (le test du χ^2 en accéléré)

Préliminaire

- La loi de Gauss ne s'applique pas à toutes les mesures
- Par exemple, les mesures de durée de fonctionnement (fiabilité), de désintégration radioactive suivent des lois exponentielles
- Il existe des tests d'ajustement qui caractérisent l'accord entre une loi théorique et une distribution des mesures
- La méthode comporte les étapes suivantes :
 - calcul de la moyenne, de l'écart-type et des valeurs de mesure centrées réduites
 - test de l'hypothèse
 - conclusion

Préparation des données

1. Calcul de la moyenne $\overline{m_N(G)}$ et de l'écart-type sans-biais $\sigma_{N-1}(G)$ des mesures.
2. Calcul des mesures centrées réduites (étape de normalisation) :

$$m_i^n(G) = \frac{m_i(G) - \overline{m_N(G)}}{\sigma_{N-1}(G)} \quad (42)$$

- La moyenne et l'écart-type des mesures centrées réduites sont respectivement 0 et 1. Les mesures centrées réduites sont sans dimension.

3. Classement des mesures centrées réduites (m.s.r.) par ordre croissant

Test du χ^2

1. Regroupement des m.s.r. en classes : $n_{\text{classes}} = \sqrt{N} >$ (il faut au moins 5 mesures par classe)
2. Calcul des bornes de chaque classe :

$$\min_{m_N(G)} + i \cdot \frac{\max_{m_N(G)} - \min_{m_N(G)}}{n_{\text{classes}}} \quad (43)$$

3. Construction de l'histogramme des fréquences relatives f_i^c . La fréquence relative est le nombre de mesure par classe divisé par N .
4. Comparaison avec l'histogramme des fréquences relatives **théoriques** f_i^t (données dans des tables)
5. Test du χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n_{\text{classes}}} \frac{(f_i^c - f_i^t)^2}{f_i^t} \quad (44)$$

- une table permet alors de déterminer le risque de rejeter l'hypothèse gaussienne par erreur alors qu'elle est vérifiée.